टी-परीक्षण (t-Test) दो मध्यमानों में अन्तर की सार्थकता परिक्षण

सर्वप्रथम William Gasset ने 'Student' के छद्म नाम से t परीक्षण का आविष्कार दो प्रतिदर्श मध्यमानों के अन्तर की सार्थकता ज्ञात करने के लिये किया था। तभी से इसे Student T Test के नाम से जाना जाता है। इसके अन्तर्गत t अनुपात की गणना की जाती है। यह अनुपात दो मध्यमानों के अन्तर तथा इस अन्तर की मानक त्रुटि का अनुपात होता है। भूगोल के अध्ययन में दो मध्यमानों में अन्तर की सार्थकता परीक्षा का विशेष महत्व है, क्योंकि इसमें अनेक तथ्य ऐसे प्रस्तुत होते हैं जिनमें यह जानना आवश्यक होता है कि क्या दोनों प्रतिदर्श मध्यमानों में विद्यमान अन्तर सार्थक है अथवा वह अन्तर संयोगवश दृष्टगत हो रहा है, वस्तुत: जिसका कोई अस्तित्व नही है।

उदाहरणार्थ किसी अध्ययन क्षेत्र में दो वर्षो के मासिक वर्षा अथवा तापमान के वितरण में अन्तर का पाया जाना या किसी अध्ययन क्षेत्र में एक निश्चित फसल का दो वर्षों में उत्पादन प्रतिरूप में अन्तर अथवा दो जनगणना वर्षो में जनसंख्या वृद्धि में अन्तर की सार्थकता परीक्षण। यहाँ यह स्पष्ट करना है कि प्रतिदर्श मध्यमानों की विषयवस्तु सांख्यिकी के अन्तर्गत मूल्य/मात्रा/उत्पादन जिसे X चिन्ह से प्रदर्शित किया जाता है, से सम्बन्धित होती है।

भूगोल विषय में जनसंख्या/उत्पादन के अध्ययन का विशेष महत्व है। सामान्यत: स्थानिक विश्लेषण एक वर्ष के आँकड़ो पर आधारित होता है। विभिन्न वर्षों में एक ही क्षेत्र में किसी फसल के उत्पादन में मौसम के प्रभाव अथवा अन्य कारणों से उत्पादन में भिन्नता का पाया जाना स्वाभाविक है। इसी प्रकार दो जनगणना वर्षों में जनसंख्या वृद्धि अथवा जनघनत्व में अन्तर का पाया जाना आदि तथ्य इसकी अध्ययन वस्तु हो सकते है जिसमें यह देखा जाता है कि दोनों वर्षों में फसलोत्पादन या अध्ययनित तत्व में कितना अन्तर आया है और वह अन्तर सार्थक है अथवा संयोगवश दृष्टिगत है। इसके अध्ययन के लिये सांख्यिकीवेत्ताओं ने Student t-test का प्रावधान किया है। इसमें एक ही अध्ययनक्षेत्र की विभिन्न इकाइयों में किसी वस्तु के उत्पादन अथवा अन्य इसी प्रकार के आँकड़ों में अन्तर की सार्थकता का परीक्षण करते हैं। t-test सम्बन्धी अध्ययनों से पूर्व शोधकर्ता द्वारा तत्सम्बन्ध में निर्मित (Formulated) परिकल्पनाओं की जानकारी होना आवश्यक है।

शून्य परिकल्पना (Null Hypothesis) - शून्य परिकल्पना एक परीक्षणाधीन (ट्रायल) परिकल्पना है और इसका उद्देश्य इस पर बल देना है कि दोनो प्रतिदर्शों में सार्थक अन्तर विद्यमान नहीं है। शून्य परिकल्पना का आश्रय लेकर अध्ययनकर्त्ता, प्रतिदर्शों के सांख्यिकी विश्लेषण द्वारा यह परीक्षण करता है कि दोनों प्रतिदर्शों से प्राप्त मध्यमानों में कोई अन्तर विद्यमान नहीं है। इसके विपरीत शोध परिकल्पना के अन्तर्गत यह माना जाता है कि दोनों प्रतिदर्श मध्यमानों में विद्यमान अन्तर सार्थक है।

यदि परिगणित मान निश्चित विश्वास सीमा (Degree of Freedom) पर t सारणीमान से

अधिक रहता है तो दोनों मध्यमानों में अन्तर सार्थक माना जाता है, जिससे शून्य परिकल्पना निरस्त मान ली जाती है। इसके विपरीत परिगणित t मान सारणीमान से कम रहता है तो दो मध्यमानों में अन्तर असार्थक माना जाता है और शून्य परिकल्पना को स्वीकृत कर लिया जाता है। यहाँ यह उल्लेखनीय है कि t अनुपात की सार्थकता, प्रायिकता (Probability) के संदर्भ में ही निर्धारित किया जाता है। इसलिये निश्चित D.F. (विश्वास की सीमा) पर सामान्यत: 1 प्रतिशत या 5 प्रतिशत के सार्थकता स्तरों का प्रयोग किया जाता है। यह सार्थकता स्तर प्रतिदर्शों के आकार पर भी निर्भर करती है। यही कारण है कि बड़े प्रतिदर्शों (प्राय: 30 से अधिक) एवं छोटे प्रतिदर्शों (प्राय: 20 से कम) हेतु सारणीमान अलग-अलग हो जाता है। इन मानों (value) से परिगणित मान अधिक होने पर ही दो प्रतिदर्श मध्यमानों में अन्तर सार्थक समझा जाता है नहीं तो सार्थक अन्तर विद्यमान न होने पर शोध-परिकल्पनायें अस्वीकृत हो जाती है फलत: शून्य परिकल्पना स्वीकृत मानी जाती है।

उदाहरण 1-

तालिका : 6.10

क्षेत्र	गेहूँ का उत्पादन / हेक्टेअर (क्विंटल में)			
	(2011) X_1	(2013) X_2	X_1^2	X_2^2
A	22	21	484	441
B	16	24	256	576
C	25	34	625	1156
D	26	25	676	625
E	20	35	400	1225
F	30	34	900	1156
G	33	22	1089	484
H	32	18	1024	324
I	28	32	784	1024
J	18	25	324	625
	$\Sigma x_1=250$	$\Sigma x_2=270$	$\Sigma x_1^2 = 6567$	$\Sigma x_2^2 =7366$

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(\Sigma x_1^2 / N_1) - (\bar{X}_1)^2}{N_1 - 1} + \frac{(\Sigma x_2^2 / N_2) - (\bar{X}_2)^2}{N_2 - 1}}}$$

$$= \sqrt{\frac{6567/10 - (25)^2}{9} + \frac{7636/10 - (27)^2}{9}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{656.7-625}{9} + \frac{763.6-729}{9}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{31.7}{9} + \frac{34.6}{9}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3.52+3.84}} = \frac{2}{\sqrt{7.36}} = \frac{2}{2.71} = 0.738$$

d.t. $= n+n-2$

$= 10 + 10-2$

$= 18$

व्याख्या- 18 d.f. पर 0.05 एवं 0.01 सार्थकता स्तर पर सारणीमान क्रमशः 2.10 एवं 2.88 है। उपरोक्त उदाहरण में परिगणित t मान 0.738 है जो दोनो सारणी मानों से काफी कम है। अतः दोनो मध्यमानों में अन्तर सार्थक नहीं है। इस प्रकार शून्य परिकल्पना स्वीकार्य है एवं शोध परिकल्पना अस्वीकृत की जाती है। इससे स्पष्ट होता है कि यहाँ जो भी अन्तर दृश्य है, वह संयोगवश है।

उदाहरण 2 -

तालिका : 6.11

क्षेत्र	धान का प्रति हे० उत्पादन(क्विटल में)			
	2001 X_1	2006 X_2	X_1^2	X_2^2
A	27	32	729	1024
B	31	29	961	841
C	35	30	1225	900
D	34	32	1156	1024
E	24	33	576	1089
F	21	39	441	1521
G	28	31	784	961
H	30	26	900	676
I	18	38	324	1444
J	22	40	484	1600
	$\Sigma x_1 = 270$	$\Sigma x_2 = 330$	$\Sigma x_1^2 = 7580$	$\Sigma x_2^2 = 11080$

$$\bar{x}_1 = 27 \qquad \bar{x}_2 = 33$$

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{(\Sigma x_1^2 / N) - (\bar{x}_1)^2}{N-1} + \frac{(\Sigma x_2^2 / N) - (\bar{x}_2)^2}{N-1}}}$$

$$= \frac{27-33}{\sqrt{\frac{(7580/10) - (27)^2}{9} + \frac{(11080/10) - (33)^2}{9}}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{\frac{758-729}{9} + \frac{1108-1089}{9}}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{\frac{29}{9} + \frac{19}{9}}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{3.22 + 2.11}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{5.33}}$$

$$= \frac{6}{2.30}$$

$$= 2.60$$

उक्त प्रश्न में N=10 है अत:

$$d.F. = 10 + 10 - 2 = 18$$

व्याख्या -18 d.F.पर 0.05 एवं 0.01 विश्वास स्तर पर सारणीमान क्रमश: 2.10 एवं 2.88 है। दिये गये प्रश्न में की गई गणना में t का मान 2.60 है। इससे स्पष्ट होता है कि 0.01 विश्वास स्तर पर यह गणना सार्थक नहीं है, क्योंकि इसका मान 2.88 से कम है जबकि यह मान 2.10 से अधिक होने के कारण 0.05 विश्वास स्तर पर दो मध्यमानों का अन्तर सार्थक है। दूसरे शब्दों में यह कहा जा सकता है कि दिये गये दोनो मध्यमानों में अन्तर 95 प्रतिशत स्तर तक सार्थक है। इस प्रकार शून्य परिकल्पना अस्वीकृत की जाती है एवं शोध परिकल्पना स्वीकार की जाती है।

उदाहरण 3 - मौलिक आँकड़ों से t-test की गणना

तालिका : 6.12

क्षेत्र	X_1	X_2	X_1^2	X_2^2
A	5	8	25	64
B	6	10	36	100
C	7	13	49	169
D	7	13	49	169
E	8	13	64	169
F	8	14	64	196
G	10	8	100	64
H	12	9	144	81
I	12	15	144	225
J	15	17	225	289
	$\Sigma X_1=90$	$\Sigma X_2=120$	$\Sigma X_1^2=900$	$\Sigma X_2^2=1526$
	$\bar{x}_1 = 9$	$\bar{x}_2 = 12$		

$$t = \frac{9-12}{\sqrt{\frac{900/10-(9)^2}{9}+\frac{1526/10-(12)^2}{9}}}$$

$$t = \frac{3}{\sqrt{\frac{90-81}{9}+\frac{152.6-144}{9}}}$$

$$t = \frac{3}{\sqrt{\frac{9}{9}+\frac{8.6}{9}}}$$

$$t = \frac{3}{\sqrt{1+0.95}}$$

$$t = \frac{3}{\sqrt{1.95}}$$

$$= \frac{3}{1.39} = 2.15$$

उदाहरण 4 - टी (t) की गणना प्रसरण (Variance) के आधार पर

तालिका : 6.13

क्षेत्र	प्रतिदश हेक्टेअर क्षेत्र पर उर्वरकों का उपयोग(क्विंटल में)					
	2011 X_1	2013 X_1	d_1	d_2	X_1^2	X_2^2
A	5	8	4	4	16	16
B	6	10	3	2	9	4
C	7	13	2	1	4	1
D	7	13	2	1	4	1
E	8	13	1	1	1	1
F	8	14	1	2	1	4
G	10	8	1	4	1	16
H	12	9	3	3	9	9
I	12	15	3	3	9	9
J	15	17	6	5	36	25
	$\Sigma x_1=90$	$\Sigma x_2=120$			$\Sigma x_1^2=90$	$\Sigma x_2^2=86$

$\bar{x}_1 = 9$ $\bar{x}_2 = 12$

$$t = \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{\frac{6d_1^2/n}{N-1} + \frac{6d_2^2/n}{N-1}}}$$

$$t = \frac{9-12}{\sqrt{\frac{90/10}{9} + \frac{86/10}{9}}}$$

$$t = \frac{3}{\sqrt{\frac{9}{9} + \frac{8.6}{9}}}$$

$$t = \frac{3}{\sqrt{1.095}} = \frac{3}{\sqrt{1.95}} = \frac{3}{1.39} = 2.15$$

D	6	5	1	1	02
E	4	5	1	1	02
F	3	5	2	4	1.25
G	4	5	2	1	02
H	3	5	2	4	1.25
I	7	5	2	4	1.25
J	8	5	3	9	1.75
N=10	ΣF_0=50				6.5

यहाँ पर

$$\text{d. f.} = (r-1)(C-1)$$
$$= (10-1)(2-1)$$
$$= 9 \times 1$$
$$= 9$$

जिसमें

C = Column

r = Row

$X^2 = 6.5$

अर्थात् दो आवृत्तियों में अन्तर 6.5 है जिसकी सार्थकता का परीक्षण किया जाना है। इस लिये पूर्व गणना के आधार पर d.f. =9 होगा। 9 d.f. पर .01 एवं 0.05 सार्थकता स्तर पर सारणीमान क्रमशः 21.66 एवं 19.91 है। चूँकि दो आवृत्तियों का अन्तर का परिगणित मान 6.5 है जो दोनो विश्वास स्तरों पर सारणीमान से काफी कम है, इसलिये स्पष्ट होता है कि दोनों आवृत्तियों में अन्तर सार्थक नहीं है। जो भी अन्तर दृष्टिगत हो रहा है, वह संयोगवश है। निष्कर्ष हेतु में शून्य परिकल्पना (Null Hypothesis) स्वीकृत की जाती है।

मानचित्रीय विश्लेषण (Cartographic Analysis)

मानचित्र एवं आरेख, ज्ञान के परिक्षेत्र में मानव समाज के लिये एक उपयोगी साधन है। मानव समाज के लिये अपने निवास्य क्षेत्र एवं परिवेश से विज्ञ होना आवश्यक एवं उपादेय है। स्थानों का विज्ञान होने के कारण भूगोल में किसी स्थान की अवस्थिति (Location), उसका विस्तार (Extent) एवं स्वरूप (Form) की जानकारी प्राप्त करना अपेक्षित है। प्राचीन काल से ही मनुष्य अपने देश एवं दूसरे देशों के क्षेत्रों की स्थिति एवं उनके स्वरुप का ज्ञान प्राप्त करने में सक्रिय रहा है। वस्तुतः क्षेत्र के संसाधन ही मानव समाज के पोषण के आधार एवं उनकी विभिन्न आवश्यकताओं के पूर्ति के साधन है। किसी स्थान के संसाधनों की जानकारी हेतु उसके विस्तार एवं स्वरूप की जानकारी प्राप्त करना आवश्यक है। इस उद्देश्य की प्राप्ति हेतु प्रारम्भिक काल से ही मानचित्रों की उपयोगिता विद्यमान रही है। इतना अवश्य है कि सीमित संसाधन के कारण

काई-वर्ग परीक्षण (X^2 test) -

दो आवृत्तियों में अन्तर की सार्थकता परीक्षण सांख्यकी अध्ययनों में विभिन्न प्रकार के मूल्यों (X) की ही भांति उनकी आवृत्तियों (Frequencies) का भी महत्व है। आवृत्तियों के बढ़ने पर स्वाभाविक रूप से मूल्यों की महत्ता बढ़ जाती है। इस परीक्षण में दो प्रकार की आवृत्तियों में साहचर्य परीक्षण किया जाता है। वस्तुतः काई वर्ग (X^2) एक अप्राचल (Non-Parametric) विधि है जो दो आवृत्तियों में साहचर्य (association) का मापन करती है। प्रतिदर्श का आकार छोटा होने पर काई-वर्ग परीक्षण अधिक उपयुक्त होता है। इस विधि का सर्वप्रथम आविष्कार हेल्मर्ट (Helmart) ने किया था। बाद में कार्ल पियर्सन ने इसका स्वतंत्र रूप से प्रतिपादन किया।

इस परीक्षण में दो प्रकार की आवृत्तियां अध्ययन हेतु ली जाती है-प्रथम, अवलोकित आवृत्तियाँ तथा दूसरी उसी के आधार पर परिगणित अर्थात् प्रत्याशित आवृत्तियों की तुलना की जाती है। इस तुलना में यह देखा जाता है कि आवृत्तियों के निरीक्षित (Observed) एवं प्रत्याशित (Expected) वितरण में समानता अथवा भिन्नता किस सीमा तक है। काई वर्ग परीक्षण का उपयोग ऐसे आँकड़ों के सन्दर्भ में किया जाता है, जिनको संवर्गों अथवा आवृत्तियों में प्रस्तुत किया गया हो। काई वर्ग परीक्षण सांख्यिकी में (X^2 test) के रुप में जाना जाता है। इसकी गणना में निम्न सूत्र प्रयुक्त होता है-

$$X^2 = \frac{\Sigma(Fo - Fe)^2}{Fe}$$

यहाँ Fo = निरीक्षित आवृत्तियाँ
(Frequency Objerved)
Fe= प्रत्याशित आवृत्तियाँ
(Frequency Estimated)

उदाहरण

तालिका : 6.14

विभिन्न जिलो में प्राथमिक स्वास्थ्य केन्द्रों की संख्या

क्षेत्र	F_o	F_e	Fo –Fe	$(Fo - Fe)^2$	$\frac{(Fo - Fe)^2}{Fe}$
A	6	5	1	1	0.2
B	4	5	1	1	0.2
C	5	5	0	0	0